Exercices sur le chapitre des dérivées et des primitives

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 - 2)^2$.
2. g est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{3x+1}$.
3. h est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{5x+3}$.

Exercice 2 : Déterminer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[2\ ;+\infty[$.
2. $h : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x} - 2x\right)^3$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.
Déterminer alors la dérivée de chacune d'elles.

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = (2x+3)\sqrt{3x-5}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2 - x - 6}$ d) $k(x) = \dfrac{1}{(5x^2-3)^3}$

e) $m(x) = (2x^3 + 3x - 1)^4$ f) $n(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

Exercice 4 : On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1. Donner le sens de variation de u et de v.
2. On appelle f la composée de u suivie de v. Donner l'expression de $f(x)$ et étudier le sens de variation de f.
3. On pose $g = u \circ v$. Donner l'expression de $g(x)$ et étudier le sens de variation de g.
4. Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Exercice 5 : On pose : $g(x) = 2x^3 + x - 2$.

1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
En déduire les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + (x-2)^2}$.

Exercice 6 : Déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.
2. Pour $x \in [1\ ;+\infty[$, $g : x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$.
3. Pour $x \in [1\ ;+\infty[$, $h : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7 : Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\ ;+\infty[$.
2. $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$ sur $[4\ ;+\infty[$.
4. $k : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire la primitive de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$ qui prend la valeur -2 en 1.

Exercice 9 : Trouver la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

$$x \mapsto x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5x - 1$$

qui s'annule pour $x = 2$.

Exercice 10 : Déterminer la primitive de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$ qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 11 : Déterminer une primitive de f sur I :

1. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$
2. $\mathrm{I} =]-\infty\ ;-3]$ et $f : x \mapsto \dfrac{-5x}{\sqrt{x^2-4}}$.

<u>Exercice 12 :</u> Une entreprise fabrique un certain produit en quantité x ($x \in]0 ; 500]$). Les coûts fixes s'élèvent à 6000€. On suppose que le coût marginal (en €) est donnée par $g(x) = 2x + 45$.

1. Quelle est l'expression du coût total en fonction de x ?
2. Comparer pour 200 unités produites, le coût marginal, le coût de la dernière unité produite et le coût d'une unité supplémentaire.

<u>Exercice 13 :</u>

1. Une fonction g admet sur $]0 ; +\infty[$ le tableau de variation suivant :

x	0		40		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	80	↗	$+\infty$

a) Combien de solutions admet l'équation $g(x) = 100$ dans $]0 ; +\infty[$?
b) Etant donnée un réel quelconque p, discuter le nombre de solutions dans $]0 ; +\infty[$ de l'équation $g(x) = p$.

2. En fait $g(x) = x + \dfrac{1600}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

a) Justifier le tableau de variation et les limites indiquées.
b) Résoudre effectivement dans $]0 ; +\infty[$ l'équation : $g(x) = 100$.
c) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $g(x) \leq 100$.
d) Démontrer que la courbe représentative de g admet deux asymptotes, dont on précisera des équations.
e) Tracer la courbe représentative de g sur l'intervalle $]0 ; 200]$. On tracera les asymptotes.
On prendra comme unité graphique sur chaque axe, 1 cm pour représenter 10.

3. $g(x)$ exprime, en euros, le coût moyen unitaire de production d'un certain bien, en fonction de la quantité x produite. On appelle p le prix de vente unitaire (en euros) imposé par la concurrence et on admet que l'entreprise vend toute sa production.
Démontrer que la production ne peut pas être rentable si p est inférieur à 80.

4. En fait, $p = 100$.

a) Pour quelles quantités la production est-elle rentable ?
b) Exprimer en fonction de x le coût total de production, et en déduire que le profit est $h(x) = -x^2 + 100x - 1600$.
c) Déterminer la quantité pour laquelle la production est la plus rentable.